1. : Simplifier de sorte qu'il n'intervienne plus qu'une seule fonction trigonométrique dans l'expression finale :

   (a) $\tan x + \cot x$

   (b) $\cot x - \tan x$

   (c) $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

   (d) $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

2. Mettre sous forme de produits (et/ou quotients) :

   (a) $\tan x + \tan 3x$

   (b) $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

   (c) $\sqrt{2}\cos 2x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{2}\sin 2x - \sin x$

3. : Montrer que $||\sin x| - |\sin y|| \leqslant |\sin(x+y)| \leqslant |\sin x| + |\sin y|$.

4. :

   (a) Résoudre l'équation $\cos 2x = \cos 3x$; présenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

   (b) Résoudre de nouveau cette équation en exprimant $\cos 2x$ et $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$; en déduire les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

5. : Calculer $\cos\dfrac{\pi}{5}$ en partant de la relation $\cos 3\dfrac{\pi}{5} = -\cos 2\dfrac{\pi}{5}$.

6. : Donner, sans faire de calculs, l'allure de la courbe de la fonction $t \mapsto \sin 8t \sin t$.

7. :

   (a) Calculer la somme : $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\theta + k\varphi)$ en multipliant cette expression par $\sin\dfrac{\varphi}{2}$ et en linéarisant.

   Réponse : $C_n = \dfrac{\sin\left((n+1)\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} \cos\left(\theta + n\dfrac{\varphi}{2}\right)$ lorsque $\varphi \neq 0 \mod 2\pi$; regarder aussi le cas $\varphi = 0 \mod 2\pi$.

   (b) Calculer aussi la somme : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(\theta + k\varphi)$.

8. : On suppose connues les formules de C_n et S_n du 7.

   (a) En déduire : $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} \sin((2k+1)x)}{\sum\limits_{k=0}^{n} \cos((2k+1)x)}$ (cf. 2. (b)).

   (b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \cos\dfrac{k\pi}{2p+1}$ [Rep : 1/2 ; linéariser].

9. : A, B, C sont les mesures prises dans $]0,\pi[$ des angles non orientés d'un triangle.

   (a) Prouver l'égalité :
   $$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

   (b) En déduire que l'aire d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale au double du produit des sinus de ses angles.

   (c) Prouver le joli résultat suivant : $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

10. :

(a) Vérifier que $\tan x = \cot x - 2\cot 2x$ (valable pour $x \in ?$).

(b) On pose pour x réel et n entier $\geqslant 1$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$;

   i. Calculer $S_n(x)$ pour $x \neq 0$ en utilisant (a).

   ii. Montrer que pour $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \frac{1}{x} - \cot x$.

11. :

   (a) Appliquer la formule d'antilinéarisation de $\cos p + \cos q$ à $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta)$.

   (b) Utiliser cette relation pour calculer $\cos 2\theta$ puis $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

   (c) En déduire plus généralement par récurrence double sur n que $\cos n\theta$ s'exprime toujours fonction de $\cos\theta$.

   (d) * Montrer similairement que $\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ s'exprime toujours fonction de $\cos\theta$.

12. * :

   (a) Calculer le produit : $\tan 1° \times \tan 2° \times \cdots \times \tan 89°$.

   (b) Linéariser $\sin x \sin(90° - x)$ et $\sin x \sin(60° - x)\sin(60° + x)$.
   En déduire par exemple $\sin 20°.\sin 40°.\sin 80°$.
   Remarque : aucun des facteurs de ce produit n'est pourtant exprimable à l'aide de radicaux.

   (c) On considère le produit $p = \prod\limits_{i=1}^{90} \sin i° = \sin 1° \times \sin 2° \times \cdots \times \sin 90°$.

      i. Montrer que $p = 2^{-44,5} \times \sin 2° \times \sin 4° \times \cdots \times \sin 90°$. Que peut-on en déduire ?

      ii. Montrer que $p = 2^{-66,5} \times \sin 4° \times \sin 8° \times \cdots \times \sin 88°$.

      iii. Montrer que $p = 2^{-80,5} \times (\sin 12° \times \sin 24° \times \cdots \times \sin 84°) \times \sin 60°$

      iv. En déduire finalement le calcul de p.

13. * : Un problème d'extrémum posé par Galilée.
   Un point A est distant d'un plan vertical P d'une distance d. Quelle inclinaison doit avoir un plan Q passant par A de sorte qu'une bille partant de A et roulant sur Q atteigne le plan P en un temps minimum ? Donner ce temps en fonction des données.